SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1996-97

Francesco Uguzzoni

UN TEOREMA DI TIPO LIOUVILLE E NUCLEO DI POISSON PER IL LAPLACIANO DI KOHN

27 febbraio 1997

Tecnoprint - Bologna 1997

Abstract. We consider the Kohn Laplacian $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ on the Heisenberg group $\mathbb{H}^n$. In the first part of this note we obtain some estimates of the Green function and the Poisson kernel for $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ on bounded domains; by means of them we are able to give L^p estimates for $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-harmonic functions in terms of the L^p norms of their boundary values. In the second part we prove the following Liouville-type theorem: if Ω is a halfspace of $\mathbb{H}^n$ whose boundary is parallel to the center of $\mathbb{H}^n$ and u is a non-negative $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-superharmonic function such that $u \in L^1(\Omega)$, then it must be $u \equiv 0$ in Ω.

Riassunto. Consideriamo il Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ sul gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$. Nella "prima parte" otteniamo alcune stime della funzione di Green e del nucleo di Poisson per $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ su domini limitati; grazie ad esse troviamo poi stime L^p per funzioni $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-armoniche in termini delle norme L^p dei loro dati al bordo. Nella "seconda parte" dimostriamo il seguente teorema di tipo Liouville : se Ω è un semispazio di $\mathbb{H}^n$ con bordo parallelo al centro di $\mathbb{H}^n$ e u è una funzione $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-superarmonica non negativa e tale che $u \in L^1(\Omega)$, allora $u \equiv 0$ in Ω.

NOTA: I risultati presentati in questo seminario sono stati ottenuti in collaborazione con il Prof. E. Lanconelli.

PRIMA PARTE
Sul nucleo di Poisson per il Laplaciano di Kohn

1 Introduzione

In questa prima parte otteniamo, sotto opportune ipotesi di regolarità per il dominio Ω, le disuguaglianze

$$G(\xi,\eta) \leq cd(\eta,\partial\Omega)d(\xi,\eta)^{1-Q},\ |\nabla_{\mathbb{H}^n} G(\xi,\cdot)| \leq cd(\xi,\cdot)^{1-Q}, |P(\xi,\eta)| \leq cd(\xi,\eta)^{1-Q}$$

(dove G è la funzione di Green e P è il nucleo di Poisson per il Laplaciano di Kohn $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ su Ω, $Q = 2n+2$ è la dimensione omogenea di $\mathbb{H}^n$ e d è la naturale distanza definita su $\mathbb{H}^n$).

Con esse riusciamo a stimare la norma L^p di una funzione $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-armonica con la norma L^p del suo dato al bordo. I risultati principali da noi ottenuti sono enunciati nei teoremi 3.6, 4.3 e 4.4.

Per il Laplaciano "classico", disuguaglianze analoghe alle nostre sono state dimostrate da Widman in [W].

Questa parte è organizzata nel modo seguente. Nel prossimo paragrafo ricaviamo una stima per le derivate delle funzioni $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-armoniche (sfruttando essenzialmente le formule di media) e scriviamo alcune formule di rappresentazione di tipo Green.

Nel terzo paragrafo dimostriamo (teorema 3.6) le citate disuguaglianze per la funzione di Green su domini con la proprietà uniforme del disco tangente esternamente (proprietà (P), cfr. definizione 3.3); la prova, ispirata in parte a quella di [W], si basa sul principio di massimo per $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ e sulle stime ottenute nel paragrafo precedente.

Nel quarto paragrafo mostriamo che se Ω è un dominio con la proprietà (P) e con frontiera regolare, i cui punti caratteristici costituiscano un insieme di misura di superficie nulla, allora (teorema 4.3) la misura armonica su $\partial\Omega$ è assolutamente continua rispetto alla misura di superficie, con densità data dal nucleo di Poisson $P(\xi,\cdot) = - < A\nabla(G(\xi,\cdot)), N >$. Mostriamo poi (teorema 4.4) che, sotto le medesime ipotesi su Ω, esiste una costante c, dipendente solo da Ω, tale che

$$\| u \|^p_{L^p(\Omega)} \leq c \| u \|^p_{L^p(\partial\Omega)}$$

per ogni funzione $u \in H(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Infine, nell'appendice, dimostriamo che una notevole classe di domini, quella degli insiemi convessi, verifica la proprietà (P).

2 Preliminari

Denoteremo i punti del gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$ con $\xi = (z,t) = (x,y,t)$. La legge di gruppo su $\mathbb{H}^n$ è definita da

$$\xi \circ \xi' = (z + z', t + t' + 2(< x', y > - < x, y' >))$$

Il Laplaciano di Kohn su $\mathbb{H}^n$ è l'operatore

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2)$$

dove per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j\partial_t$$
$$Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j\partial_t$$

Si pone

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$$

L'operatore $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ ha forma caratteristica semidefinita positiva ma non è ellittico in nessun punto; può essere scritto in forma di divergenza come

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = div(A\nabla)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 2y \\ 0 & I_n & -2x \\ 2y & -2x & 4|z|^2 \end{pmatrix}$$

Indicheremo con $H(\Omega)$ l'insieme delle funzioni $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-armoniche in Ω. Per $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ vale poi il principio di massimo forte (cfr.[B]).

Esiste un naturale gruppo di dilatazioni su $\mathbb{H}^n$ definito da $\delta_\lambda(\xi) = (\lambda z, \lambda^2 t)$, per ogni $\lambda > 0$. Il determinante Jacobiano di δ_λ è λ^Q dove $Q = 2n + 2$ prende il nome di dimensione omogenea di $\mathbb{H}^n$. Gli operatori $\nabla_{\mathbb{H}^n}$ e $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ risultano invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra τ_ξ di $\mathbb{H}^n$ ed omogenei (di grado uno e di grado due, nell'ordine) rispetto alle dilatazioni δ_λ. Una forte analogia fra gli operatori $-\Delta$ e $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ sta nel fatto che la soluzione fondamentale di quest'ultimo (cfr.[F]) è data da

$$\Gamma(\xi) = \frac{c_Q}{d(\xi)^{Q-2}}$$

dove $c_Q > 0$ e $d(\xi) = (|z|^4 + t^2)^{1/4}$. Se si pone poi $d(\xi, \xi') = d(\xi'^{-1} \circ \xi)$ allora d risulta una distanza su $\mathbb{H}^n$ (cfr.[C]).

Per maggiori dettagli sul gruppo di Heisenberg si vedano, ad esempio, [FS] e [GL].

Di importanza fondamentale risultano le seguenti formule di media per funzioni $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-armoniche, dovute a Gaveau [G] e a Garofalo e Lanconelli ([GL], Teorema 2.1.). Siano u una funzione $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-armonica in un aperto Ω di $\mathbb{H}^n$ e $B_r = B_d(\xi, r)$ un disco metrico con chiusura inclusa in Ω; allora

$$u(\xi) = \frac{1}{Q\alpha_Q r^{Q-1}} \int_{\partial B_r} \frac{\psi(\xi, \xi')}{|\nabla d(\xi, \xi')|} u(\xi') d\sigma(\xi') \tag{2.1}$$

$$u(\xi) = \frac{1}{\beta_Q r^{Q+2}} \int_{B_r} |z - z'|^2 u(\xi') d\xi' \tag{2.2}$$

dove $\psi(\xi) = \frac{|z|^2}{d(\xi)^2}$, $\psi(\xi, \xi') = \psi(\xi'^{-1} \circ \xi)$. Osserviamo che la formula di media solida (2.2) è differente da quella in [GL], ma si ricava facilmente dalla (2.1) per integrazione:

$$u(\xi) = \frac{Q+2}{r^{Q+2}} \int_0^r \varrho^{Q+1} u(\xi) d\varrho = \frac{1}{\beta_Q r^{Q+2}} \int_0^r \varrho^2 \int_{\partial B_\varrho} \frac{\psi(\xi, \xi')}{|\nabla d(\xi, \xi')|} u(\xi') d\sigma(\xi') d\varrho =$$

$$= \frac{1}{\beta_Q r^{Q+2}} \int_0^r \int_{\partial B_\varrho} \frac{d(\xi, \xi')^2 \psi(\xi, \xi')}{|\nabla d(\xi, \xi')|} u(\xi') d\sigma(\xi') d\varrho =$$

(tenendo presente la formula di coarea e la definizione di ψ)

$$= \frac{1}{\beta_Q r^{Q+2}} \int_{B_r} |z - z'|^2 u(\xi') d\xi'$$

Utilizzando le formule di media si riescono a stimare le derivate di u lungo i campi in termini di u. Più precisamente si ha la seguente

PROPOSIZIONE 2.1 *Siano Ω un aperto di $\mathbb{H}^n$, $u \in H(\Omega)$, $\overline{B_d(\xi, r)} \subseteq \Omega$; allora*

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} u(\xi)| \leq \frac{c}{r} \sup_{B_d(\xi, r)} |u| \tag{2.3}$$

$$|Z_1 \dots Z_k u(\xi)| \leq \frac{c}{r^k} \sup_{B_d(\xi, r)} |u| \quad \forall Z_1, .., Z_k \in \{X_1, .., X_n, Y_1, .., Y_n\} \tag{2.4}$$

con $c = c(Q)$. Se inoltre Ω è limitato, allora si ha anche

$$|\partial_t u(\xi)| \leq \frac{c}{r} \sup_{\partial B_d(\xi, r)} |u| \tag{2.5}$$

con $c = c(\Omega)$.

Dimostrazione

Per provare (2.3) e (2.4) effettuiamo la cosiddetta superposizione dell'operatore di media e scarichiamo le derivate sul mollificatore. Sia $\varphi \in C_0^\infty(]0,1[,[0,+\infty[)$ con $\int \varphi = 1$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, poniamo $\varphi_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\varphi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$; poniamo poi $\Phi : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(\xi) = |z|^2 \int_{d(\xi)}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{\beta_Q t^{Q+2}} dt$$

e per ogni $\varepsilon > 0$, $\Phi_\varepsilon = \varepsilon^{-Q}\Phi \circ \delta_{\varepsilon^{-1}}$. Si verifica facilmente che per ogni $\xi \in \mathbb{H}^n$

$$\Phi_\varepsilon(\xi) = |z|^2 \int_{d(\xi)}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(t)}{\beta_Q t^{Q+2}} dt$$

Si ha poi per ogni $\xi \in \Omega_\varepsilon = \{\xi \text{ tali che } \overline{B_d(\xi,\varepsilon)} \subseteq \Omega\}$

$$u(\xi) = (\Phi_\varepsilon * u)(\xi) := \int \Phi_\varepsilon(\xi'^{-1} \circ \xi) u(\xi') d\xi'$$

Infatti, usando (2.2) si ottiene

$$u(\xi) = \int_0^{+\infty} \varphi_\varepsilon(\varrho) u(\xi) d\varrho = \int_0^{\varepsilon} \frac{\varphi_\varepsilon(\varrho)}{\beta_Q \varrho^{Q+2}} \int_{d(\xi,\xi')<\varrho} |z - z'|^2 u(\xi') d\xi' d\varrho =$$

$$= \int_{\mathbb{H}^n} |z - z'|^2 u(\xi') \int_{d(\xi,\xi')}^{+\infty} \frac{\varphi_\varepsilon(\varrho)}{\beta_Q \varrho^{Q+2}} d\varrho d\xi' = (\Phi_\varepsilon * u)(\xi)$$

In definitiva, derivando sotto il segno di integrale, si ha per ogni $\xi \in \Omega_\varepsilon$

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} u(\xi)| = |((\nabla_{\mathbb{H}^n} \Phi_\varepsilon) * u)(\xi)| \leq (\sup_{B_d(\xi,\varepsilon)} |u|) \int |\nabla_{\mathbb{H}^n} \Phi_\varepsilon| =$$

$$= (\sup_{B_d(\xi,\varepsilon)} |u|)\varepsilon^{-1} \int |\nabla_{\mathbb{H}^n} \Phi| = \frac{c}{\varepsilon} \sup_{B_d(\xi,\varepsilon)} |u|$$

Derivando ulteriormente si ottiene (2.4). Proviamo ora (2.5). Poichè ∂_t commuta con $\Delta_{\mathbb{H}^n}$, risulta $\partial_t u \in H(\Omega)$ e quindi possiamo applicare (2.2) a $\partial_t u$ ottenendo

$$|\partial_t u(\xi)| = \frac{1}{\beta_Q r^{Q+2}} \left| \int_{B_d(\xi,r)} div_{\xi'}(0, |z - z'|^2 u(\xi')) d\xi' \right| =$$

(per il teorema della divergenza, indicando con N la normale esterna)

$$= \frac{1}{\beta_Q r^{Q+2}} \left| \int_{\partial B_d(\xi,r)} |z - z'|^2 u(\xi') N_{2n+1} d\xi' \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\beta_Q r^Q} |\partial B_d(\xi, r)| \sup_{\partial B_d(\xi,r)} u$$

Un calcolo diretto mostra poi che, poichè Ω è limitato, esiste $c = c(\Omega)$ tale che $|\partial B_d(\xi, r)| \leq cr^{Q-1}$. Osserviamo esplicitamente che, se Ω non è limitato, quest'ultima stima non è più valida; si ha infatti, per ogni r fissato, $|\partial B_d(\xi, r)| \to +\infty$, per $|z| \to +\infty$.
□

Ricordando che $\Delta_{\mathbb{H}^n} = div A\nabla$ ed applicando il teorema della divergenza su un aperto limitato D sufficientemente regolare, si ottiene, con un argomento di carattere standard, la formula di rappresentazione di Green per funzioni $u \in C^\infty(\overline{D})$; risulta per ogni $\xi \in D$

$$u(\xi) = \int_{\partial D} (\Gamma(\xi, \cdot) < A\nabla u, N > - u < A\nabla(\Gamma(\xi, \cdot)), N >) d\sigma - \int_D \Gamma(\xi, \cdot) \Delta_{\mathbb{H}^n} u \qquad (2.6)$$

Sia ora Ω un aperto limitato di $\mathbb{H}^n$ che ammette funzione di Green, cioè tale che per ogni $\xi \in \Omega$ esista la soluzione classica h_ξ del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n} h_\xi = 0 & in\ \Omega \\ h_\xi = \Gamma(\xi, \cdot) & in\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (2.7)$$

In tal caso la funzione di Green è definita da

$$G(\xi, \xi') = \Gamma(\xi, \xi') - h_\xi(\xi') \quad \forall \xi, \xi' \in \Omega \qquad (2.8)$$

Sia poi $u \in H(\Omega)$ e supponiamo che $\overline{D} \subseteq \Omega$; allora per ogni $\xi \in D$ vale

$$u(\xi) = \int_{\partial D} (G(\xi, \cdot) < A\nabla u, N > - u < A\nabla(G(\xi, \cdot)), N >) d\sigma \qquad (2.9)$$

Questa formula, della quale faremo uso in seguito, si ottiene dalla (2.6) tenendo presente che, di nuovo per il teorema della divergenza, si ha

$$0 = \int_D (u \Delta_{\mathbb{H}^n} h_\xi - h_\xi \Delta_{\mathbb{H}^n} u) = \int_{\partial D} (u < A\nabla h_\xi, N > - h_\xi < A\nabla u, N >) d\sigma$$

3 Stime della funzione di Green

LEMMA 3.1 *Siano $r > 0$, $\xi, \xi' \in \mathbb{H}^n \setminus B_d(0,r)$; allora*

$$|\Gamma(\xi) - \Gamma(\xi')| \leq c r^{1-Q} d(\xi, \xi') \tag{3.1}$$

con $c = c(Q)$.

Dimostrazione

Poniamo $t = d(\xi)$, $t' = d(\xi')$ ed applichiamo il teorema del valor medio alla funzione t^{2-Q}. Poichè $t, t' \geq r$, esiste $t_0 \geq r$ tale che

$$|\Gamma(\xi) - \Gamma(\xi')| = c|t^{2-Q} - t'^{2-Q}| = c|(2-Q)t_0{}^{1-Q}(t-t')| \leq$$

$$\leq c r^{1-Q} |d(\xi) - d(\xi')| \leq c r^{1-Q} d(\xi, \xi')$$

□

LEMMA 3.2 *Siano D un aperto limitato di $\mathbb{H}^n$, $\xi_0 \in \partial D$, $u \in H(D) \cap C(\overline{D})$; poniamo poi $\varphi = u|_{\partial D}$. Supponiamo che esistano $r > 0$ ed $\eta_0 \in \mathbb{H}^n$ tali che*

(i) $B_d(\eta_0, r) \cap D = \emptyset$, $\xi_0 \in \partial B_d(\eta_0, r)$

(ii) $\varphi \equiv 0$ *in* $\partial D \cap B_d(\eta_0, 2r)$

Allora per ogni $\xi \in D$ si ha

$$|u(\xi)| \leq c(\max_{\partial D} |\varphi|) \frac{d(\xi, \xi_0)}{r} \tag{3.2}$$

con $c = c(Q)$.

Dimostrazione

Poniamo $M = \max_{\partial D} |\varphi|$ ed utilizziamo come funzione barriera

$$w(\xi) = M \frac{\Gamma(r) - \Gamma(\xi, \eta_0)}{\Gamma(r) - \Gamma(2r)}$$

Risulta $w \in H(D)$ e da (ii) segue che $w \geq |\varphi|$ in ∂D. Pertanto, per il principio di massimo forte (cfr.[B]), deve essere $w \geq |u|$ in D e dunque usando (3.1) si ottiene per ogni $\xi \in D$

$$|u(\xi)| \leq M \frac{\Gamma(\xi_0, \eta_0) - \Gamma(\xi, \eta_0)}{c r^{2-Q}} \leq cM \frac{r^{1-Q} d(\xi, \xi_0)}{r^{2-Q}}$$

dove tutte le costanti dipendono solo da Q.

□

DEFINIZIONE 3.3 *Diremo che un aperto Ω di $\mathbb{H}^n$ verifica la proprietà uniforme del disco tangente esternamente (o più brevemente che verifica (P)) se e solo se esiste $r_0 > 0$ per il quale Ω verifica*

$(P)_{r_0}$ $\forall \xi \in \partial\Omega\ \forall r \in]0, r_0]\ \exists \eta \in \mathbb{H}^n$ *tale che* $B_d(\eta, r) \cap \Omega = \emptyset$, $\xi \in \partial B_d(\eta, r)$

OSSERVAZIONE 3.4 *Se Ω è limitato e verifica (P) allora con il metodo di Perron si trova che per ogni $\varphi \in C(\partial\Omega)$ esiste la soluzione classica di*

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n} u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

In particolare esiste la funzione di Green per Ω.

OSSERVAZIONE 3.5 *Ogni aperto convesso (e quindi, in particolare, ogni disco nella metrica d) verifica $(P)_{r_0}$ per tutti gli $r_0 > 0$.*

Per la prova, non immediata, di quest'ultima affermazione si rimanda all'appendice (corollario A.3).

TEOREMA 3.6 *Sia Ω un aperto connesso e limitato di $\mathbb{H}^n$ che verifica (P) ed indichiamo con G la sua funzione di Green; allora per ogni $\xi, \eta \in \Omega$, $\xi \neq \eta$ si ha*

$$0 < G(\xi, \eta) \leq c d(\xi, \eta)^{2-Q} \tag{3.3}$$

$$G(\xi, \eta) \leq c d(\eta, \partial\Omega) d(\xi, \eta)^{1-Q} \tag{3.4}$$

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} G(\xi, \cdot)|(\eta) \leq c d(\xi, \eta)^{1-Q} \tag{3.5}$$

con $c = c(\Omega)$.

Dimostrazione

La (3.3) è conseguenza immediata del principio di massimo forte; basta infatti confrontare h_ξ con $\Gamma(\xi, \cdot)$ su $\Omega \setminus B_d(\xi, \varepsilon)$ per ε sufficentemente piccolo per ottenere $0 < h_\xi < \Gamma(\xi, \cdot)$ in Ω.

Dimostriamo ora la (3.4). Esiste $r_0 = r_0(\Omega) > 0$ tale che Ω verifica $(P)_{r_0}$. Fissiamo $\xi_0, \eta_0 \in \Omega$ ($\xi_0 \neq \eta_0$) e poniamo per brevità

$$\delta = d(\eta_0, \partial\Omega),\ \varrho = d(\xi_0, \eta_0)$$

Poniamo poi

$$r = \min\{\frac{\varrho}{8}, r_0\} \tag{3.6}$$

Se $\delta \geq 2r_0$ o se $\varrho \leq 4\delta$ la (3.4) è conseguenza immediata della (3.3), essendo Ω limitato. Supponiamo dunque che sia $\delta < 2r_0$, $\varrho > 4\delta$, cioè

$$\delta < 2r \tag{3.7}$$

Esiste $\eta_1 \in \partial\Omega$ tale che

$$d(\eta_0, \eta_1) = \delta$$

Inoltre, poichè Ω verifica $(P)_{r_0}$ ed è $r \leq r_0$, esiste $\eta_2 \in \mathbb{H}^n$ tale che

$$B_d(\eta_2, r) \cap \Omega = \emptyset, \ \eta_1 \in \partial B_d(\eta_2, r) \tag{3.8}$$

Poniamo

$$B_1 = B_d(\eta_2, r), B_2 = B_d(\eta_2, 2r), B_4 = B_d(\eta_2, 4r)$$
$$D = \Omega \cap B_4, \ \partial_0 = (\partial\Omega) \cap B_2, \ \partial_1 = (\partial B_4) \cap \Omega$$

Allora esiste $\varphi \in C(\partial D)$ tale che

$$\varphi \equiv 0 \ in \ \partial_0, \ \varphi \equiv 1 \ in \ \partial_1, \ 0 \leq \varphi \leq 1 \tag{3.9}$$

Poichè sia Ω che B_4 verificano (P) (cfr. osservazione 3.5) anche D verifica (P) e dunque in particolare (cfr. osservazione 3.4) esiste $u \in H(D) \cap C(\overline{D})$ tale che $u = \varphi$ in ∂D. Dal principio di massimo e dalla (3.9) segue poi che $0 \leq u \leq 1$. Possiamo ora applicare il lemma 3.2 (in quanto (3.8) e (3.9) ci assicurano che le ipotesi del lemma sono verificate) ed ottenere per ogni $\xi \in D$.

$$|u(\xi)| \leq c\frac{d(\xi, \eta_1)}{r}$$

con $c = c(Q)$. In particolare, poichè da (3.7) segue che $\eta_0 \in D$, si ha

$$|u(\eta_0)| \leq c\frac{\delta}{r} \tag{3.10}$$

Vogliamo ora confrontare $v := G(\xi_0, \cdot)$ con u in D. Da (3.6), (3.7), (3.8) segue

$$d(\xi_0, \eta_2) \geq d(\xi_0, \eta_0) - d(\eta_0, \eta_2) \geq \varrho - d(\eta_0, \eta_1) - d(\eta_1, \eta_2)$$
$$= \varrho - \delta - r > \varrho - 3r \geq \varrho - \frac{3}{8}\varrho = \frac{5}{8}\varrho$$

e dunque si ha

$$d(\xi_0, \overline{D}) \geq d(\xi_0, \overline{B_4}) \geq d(\xi_0, \eta_2) - 4r \geq \frac{5}{8}\varrho - \frac{\varrho}{2} = \frac{\varrho}{8} \tag{3.11}$$

Tenendo conto di (3.3) si ottiene infine per ogni $\xi \in \overline{D}$

$$v(\xi) \leq cd(\xi, \xi_0)^{2-Q} \leq c_0\varrho^{2-Q}$$

Se poniamo $w = \frac{v}{c_0 \varrho^{2-Q}}$ si ha dunque $w \leq 1$ in $\overline{D}$ e quindi in particolare (cfr.(3.9))

$$w \leq 1 \equiv u \; in \; \partial_1$$

Inoltre essendo $G(\xi_0, \xi) = 0$ per ogni $\xi \in \partial\Omega$ si ha anche

$$w \equiv 0 \leq u \; in \; \partial\Omega \cap \partial D = \partial D \setminus \partial_1$$

Pertanto $w \leq u \; in \; \partial D$ e, poichè $u, w \in H(D)$ (ricordiamo che (3.11) ci assicura che il polo ξ_0 di w non sta in D), di nuovo per il principio di massimo deve essere $w \leq u$ in D, cioè $v \leq c_0 \varrho^{2-Q} u$ in D. Da questo e dalla (3.10) segue

$$G(\xi_0, \eta_0) = v(\eta_0) \leq c_0 \varrho^{2-Q} u(\eta_0) \leq c \frac{\delta}{r} \varrho^{2-Q}$$

Osserviamo ora che risulta $\varrho \leq cr$; infatti (cfr.(3.6)) se $\frac{\varrho}{8} \leq r_0$ si ha $r = \frac{\varrho}{8}$, se invece $\frac{\varrho}{8} \geq r_0$ vale $r = r_0 = r_0(\Omega) = c_\Omega diam(\Omega) \geq c_\Omega \varrho$. In definitiva si ha dunque

$$G(\xi_0, \eta_0) \leq c \frac{\delta \varrho^{2-Q}}{r} \leq c\delta \varrho^{1-Q} = c d(\eta_0, \partial\Omega) d(\xi_0, \eta_0)^{1-Q}$$

con $c = c(\Omega)$. Con questo (3.4) è dimostrata.

Rimane da provare (3.5). Continuiamo ad utilizzare le precedenti notazioni per $\delta = d(\eta_0, \partial\Omega)$, $\varrho = d(\xi_0, \eta_0)$ e $v = G(\xi_0, \cdot)$; poniamo poi

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{\varrho, \delta\}$$

$$B = B_d(\eta_0, \varepsilon), \; B_0 = B_d(\eta_0, 2\varepsilon)$$

Allora $\overline{B} \subseteq B_0 \subseteq \Omega$, $v \in H(B_0)$ e per ogni $\eta \in B$ valgono

$$\begin{cases} d(\xi_0, \eta) \geq d(\xi_0, \eta_0) - d(\eta, \eta_0) \geq \varrho - \varepsilon \geq \frac{\varrho}{2} \\ d(\eta, \partial\Omega) \leq d(\eta_0, \partial\Omega) + d(\eta, \eta_0) \leq \delta + \varepsilon \leq \frac{3}{2}\delta \end{cases} \tag{3.12}$$

Usando ora la stima (2.3) per $|\nabla_{\mathbb{H}^n} v|$ in B, possiamo concludere

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} v(\eta_0)| \leq \frac{c}{\varepsilon} \sup_B |v| \leq$$

(se $\delta \leq \varrho$ e quindi $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$, usando (3.4), (3.12))

$$\leq \frac{c}{\varepsilon} \sup_{\eta \in B} (d(\eta, \partial\Omega) d(\xi_0, \eta)^{1-Q}) \leq \frac{c}{\varepsilon} \delta \varrho^{1-Q} = c\varrho^{1-Q}$$

(se $\delta \geq \varrho$ e quindi $\varepsilon = \frac{\varrho}{2}$, usando (3.3), (3.12))

$$\leq \frac{c}{\varepsilon} \sup_{\eta \in B} d(\xi_0, \eta)^{2-Q} \leq \frac{c}{\varepsilon} \varrho^{2-Q} = c\varrho^{1-Q}$$

□

4 Nucleo di Poisson e stime L^p per funzioni $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-armoniche

Ricordiamo che un punto ξ appartenente al bordo di un aperto regolare Ω si dice caratteristico se e solo se i campi $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ sono tutti tangenti a $\partial\Omega$ in ξ. Kohn e Nirenberg hanno provato in [KN] che, se Ω è limitato e con frontiera liscia, il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n} u = 0 & in\ \Omega \\ u = \varphi & in\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.1}$$

con dato al bordo $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ ammette un'unica soluzione classica u che risulta di classe C^∞ fino al bordo, lontano dai punti caratteristici di $\partial\Omega$ (cfr. anche [J], Teorema 7.1). Vicino ai punti caratteristici, la regolarità al bordo può invece drasticamente mancare; per questo motivo non sembra possibile, in generale, definire nel modo classico il nucleo di Poisson.

Faremo dunque le seguenti ipotesi su Ω

(I_1) Ω *ha frontiera* C^∞ [1]
(I_2) $\sigma(K_\Omega) = 0$

dove σ denota la misura di superficie e

$$K_\Omega = \{\textit{punti caratteristici di } \partial\Omega\} =$$

$$= \{\xi \in \partial\Omega \textit{ tali che } N_j + 2y_j N_{2n+1} = 0 = N_{n+j} - 2x_j N_{2n+1}\ \forall j \in \{1, \dots, n\}\}$$

Con $N = N(\xi)$ abbiamo indicato, al solito, la normale esterna a Ω.

OSSERVAZIONE 4.1 *Se Ω è limitato K_Ω è compatto.*

Sia dunque Ω un aperto limitato di $\mathbb{H}^n$ che verifica (I_1) e (I_2); allora per ogni $\xi \in \Omega$, $G(\xi, \cdot)$ risulta regolare al bordo quasi dappertutto (cfr.(2.7),(2.8)) e dunque è ben posta la seguente definizione del nucleo di Poisson di Ω

$$P(\xi, \eta) = - < A\nabla(G(\xi, \cdot)), N > (\eta)$$

per $\xi \in \Omega$, $\eta \in \partial\Omega$.

LEMMA 4.2 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{H}^n$ che verifica (P), (I_1) e (I_2) e sia $\varphi \in C^\infty(\partial\Omega)$; denotiamo con u la soluzione classica di (4.1) in Ω; supponiamo poi che φ sia costante in un intorno di $K = K_\Omega$. Allora si ha*

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} u| \in L^\infty(\Omega) \tag{4.2}$$

[1] In realtà questo presupposto è sovrabbondante.

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} P(\xi, \cdot)\varphi d\sigma \quad \forall \xi \in \Omega \tag{4.3}$$

Dimostrazione
Proviamo (4.2). Non è restrittivo supporre che φ sia nulla in un intorno V di K (V aperto di $\mathbb{H}^n$). Poichè K è compatto e Ω verifica (P) esistono un nuovo intorno V_1 di K, $V_1 \subseteq V$ ed un raggio $r_1 > 0$ tali che in ogni punto $\eta \in (\partial\Omega) \cap V_1$ ci sia un disco di raggio r_1 tangente esternamente a Ω e il corrispondente disco di raggio doppio sia incluso in V. Possiamo allora applicare il lemma 3.2 ed ottenere per ogni $\xi \in \Omega$, per ogni $\eta \in (\partial\Omega) \cap V_1$

$$|u(\xi)| \leq c \max_{\partial\Omega} |\varphi| \frac{d(\xi, \eta)}{r_1} = c d(\xi, \eta)$$

Esiste poi un ulteriore intorno V_2 di K, $V_2 \subseteq V_1$, tale che per ogni $\xi \in V_2 \cap \Omega$ e per ogni $\xi' \in B_\xi = B_d(\xi, \frac{d(\xi, \partial\Omega)}{2})$, esiste $\eta' \in (\partial\Omega) \cap V_1$ tale che $d(\xi', \partial\Omega) = d(\xi', \eta')$ e dunque si ha per ogni $\xi' \in B_\xi$

$$|u(\xi')| \leq c d(\xi', \partial\Omega)$$

D'altra parte $d(\xi', \partial\Omega) \leq d(\xi', \xi) + d(\xi, \partial\Omega) \leq \frac{3}{2} d(\xi, \partial\Omega)$ e quindi usando la stima (2.3) per $|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|$ in B_ξ, si ottiene per ogni $\xi \in V_2 \cap \Omega$

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} u(\xi)| \leq \frac{c}{d(\xi, \partial\Omega)} \sup_{B_\xi} |u| \leq \frac{c}{d(\xi, \partial\Omega)} \sup_{\xi' \in B_\xi} d(\xi', \partial\Omega) \leq c$$

Del resto $|\nabla_{\mathbb{H}^n} u| \in C^\infty(\overline{\Omega \setminus V_2})$ per quanto provato in [KN] e quindi $|\nabla_{\mathbb{H}^n} u|$ è limitato su tutto Ω.

Vediamo ora come dalla (4.2) segua la (4.3). Consideriamo una famiglia $\{\Omega_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ di aperti regolari che, per $\varepsilon \to 0$, approssimino con continuità Ω dall'interno e tali che, per ogni $\varepsilon > 0$, si abbia $\overline{\Omega_\varepsilon} \subseteq \Omega$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ vale la (2.9) per $D = \Omega_\varepsilon$; poichè inoltre per ogni fissato $\xi \in \Omega$ (per (3.3), (3.5) e (4.2)) valgono in $\partial\Omega$, per ogni ε sufficientemente piccolo,

$$| < A\nabla u, N > G(\xi, \cdot)| \leq < A\nabla u, \nabla u >^{1/2} < AN, N >^{1/2} G(\xi, \cdot) \leq$$

$$\leq |\nabla_{\mathbb{H}^n} u| \ \| A \| \ G(\xi, \cdot) \leq c d(\xi, \cdot)^{2-Q} \leq c_\xi$$

e

$$|u < A\nabla G(\xi, \cdot), N > | \leq |u \nabla_{\mathbb{H}^n} G(\xi, \cdot)| \ \| A \| \leq c d(\xi, \cdot)^{1-Q} \leq c_\xi$$

possiamo passare al limite per $\varepsilon \to 0$, e ricordando che $G(\xi, \cdot) = 0$ in $\partial\Omega$, ottenere la (4.3).
□

Abbiamo ora tutti i requisiti che ci servono per dimostrare i due risultati principali di questo lavoro.

TEOREMA 4.3 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{H}^n$ che verifica (P), (I_1) e (I_2) e sia $\xi \in \Omega$; indichiamo con μ^ξ la misura armonica in $\partial\Omega$ relativa al punto ξ. Allora*

$$d\mu^\xi = P(\xi, \cdot)d\sigma \tag{4.4}$$

cioè μ^ξ è assolutamente continua, con densità $P(\xi, \cdot)$, rispetto alla misura di superficie σ. Vale inoltre la seguente stima del nucleo di Poisson P

$$0 \leq P(\xi, \eta) \leq cd(\xi, \eta)^{1-Q} \tag{4.5}$$

per ogni $\xi \in \Omega$, $\eta \in \partial\Omega$, con $c = c(\Omega)$.

Dimostrazione

Proviamo prima (4.5). Dal principio di massimo e dalla (4.3) segue subito che $P \geq 0$. Inoltre usando la stima (3.5) si ottiene

$$P(\xi, \eta) \leq (< A\nabla G(\xi, \cdot), \nabla G(\xi, \cdot) >^{1/2} < AN, N >^{1/2})(\eta) \leq$$

$$|\nabla_{\mathbb{H}^n} G(\xi, \cdot)|(\eta) \ \| A(\eta) \| \leq c_\Omega d(\xi, \eta)^{1-Q}$$

Proviamo ora (4.4). Fissiamo $\xi \in \Omega$ e poniamo, per ogni sottinsieme misurabile E di $\partial\Omega$,

$$P^\xi(E) = \int_E P(\xi, \cdot)d\sigma$$

Allora, essendo $P \geq 0$, P^ξ è una misura su $\partial\Omega$; dobbiamo provare che $P^\xi = \mu^\xi$. Per brevità poniamo $P = P^\xi$, $\mu = \mu^\xi$, $K = K_\Omega$. Grazie al lemma 4.2 sappiamo che

$$\int_{\partial\Omega} \varphi d\mu = \int_{\partial\Omega} \varphi dP$$

per ogni $\varphi \in C_0^\infty(\partial\Omega)$ che sia costante in un intorno di K. Sia $E \subseteq \partial\Omega$, misurabile; allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono A_1, A_2, aperti di $\partial\Omega$, tali che $E \subseteq A_1 \subseteq \overline{A_1} \subseteq A_2$, $P(A_2 \setminus E) < \varepsilon$ e (ricordando che $\sigma(K) = 0$) esistono U_0, U_1, U_2 aperti di $\partial\Omega$ tali che $K \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1 \subseteq \overline{U_1} \subseteq U_2$, $P(U_2) < \varepsilon$. Siano ora $\Phi, \varphi, \psi \in C_0^\infty(\partial\Omega)$ tali che

$$0 \leq \Phi \leq 1 \ , \ \Phi \equiv 1 \ in \ \partial\Omega \setminus U_1, \ \Phi \equiv 0 \ in \ U_0$$

$$0 \leq \varphi \leq 1 \ , \ \varphi \equiv 0 \ in \ \partial\Omega \setminus U_2, \ \varphi \equiv 1 \ in \ U_1$$

$$0 \leq \psi \leq 1 \ , \ \psi \equiv 0 \ in \ \partial\Omega \setminus A_2, \ \psi \equiv 1 \ in \ A_1$$

Risulta allora

$$\mu(U_1) \leq \int \varphi d\mu = \int \varphi dP \leq P(U_2) < \varepsilon$$

e quindi

$$\mu(E) \leq \mu(E \setminus U_1) + \mu(U_1) < \varepsilon + \mu(E \setminus U_1) \leq$$
$$\leq \varepsilon + \int \psi \Phi d\mu = \varepsilon + \int \psi \Phi dP \leq \varepsilon + P(A_2) =$$
$$= \varepsilon + P(E) + P(A_2 \setminus E) < P(E) + 2\varepsilon$$

Poichè ε è arbitrario si ha dunque per ogni insieme misurabile $E \subseteq \partial\Omega$

$$\mu(E) \leq P(E)$$

In particolare anche $\mu(A_2 \setminus E) \leq P(A_2 \setminus E)$ e quindi risulta per ogni $\varepsilon > 0$

$$P(E) \leq P(E \setminus U_1) + P(U_1) < \varepsilon + P(E \setminus U_1) \leq$$
$$\leq \varepsilon + \int \psi \Phi dP = \varepsilon + \int \psi \Phi d\mu \leq \varepsilon + \mu(A_2) =$$
$$= \varepsilon + \mu(E) + \mu(A_2 \setminus E) \leq \varepsilon + \mu(E) + P(A_2 \setminus E) <$$
$$< \mu(E) + 2\varepsilon$$

e dunque $P(E) \leq \mu(E)$. In definitiva $P(E) = \mu(E)$ e con questo la prova è conclusa. □

TEOREMA 4.4 *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{H}^n$ che verifica (P), (I_1) e (I_2) e sia $\varphi \in C(\partial\Omega)$; poniamo poi*

$$u = \int_{\partial\Omega} P(\xi, \cdot)\varphi d\sigma$$

Allora u è l'unica soluzione classica di

$$\begin{cases} \Delta_{\mathbb{H}^n} u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{in } \partial\Omega \end{cases}$$

Inoltre, per ogni $p \in [1, +\infty[$ si ha

$$\| u \|^p_{L^p(\Omega)} \leq c \| \varphi \|^p_{L^p(\partial\Omega)}$$

con c che dipende solo da Ω.

Dimostrazione

La prima parte dell'enunciato è conseguenza immediata di (4.4). La stima L^p si prova facilmente usando (4.5). Si ha infatti, dalla diseguaglianza di Hölder ed osservando che $\int_{\partial\Omega} P(\xi, \cdot) d\sigma = 1$,

$$\| u \|^p_{L^p(\Omega)} \leq \int_\Omega \left| \int_{\partial\Omega} P(\xi, \cdot) d\sigma \right|^{\frac{p}{p'}} \left| \int_{\partial\Omega} P(\xi, \cdot) |\varphi|^p d\sigma \right|^{\frac{p}{p}} d\xi =$$

$$= \int_{\partial\Omega} |\varphi|^p(\eta) \int_{\Omega} P(\xi,\eta) d\xi d\sigma(\eta) \leq$$

$$\leq c_\Omega \int_{\partial\Omega} |\varphi|^p(\eta) \int_{\Omega} d(\xi,\eta)^{1-Q} d\xi d\sigma(\eta) \leq c'_\Omega \parallel \varphi \parallel^p_{L^p(\partial\Omega)}$$

□

A Appendice

PROPOSIZIONE A.1 *Sia π un iperpiano di $\mathbb{H}^n$ e sia $\xi_0 \in \pi$; allora per ogni $R > 0$ esistono due dischi metrici B e $\widetilde{B}$ di raggio R, che stanno da parti opposte rispetto a π e tali che*

$$\overline{B} \cap \pi = \{\xi_0\} = \overline{\widetilde{B}} \cap \pi$$

Dimostrazione

Poichè τ_{ξ_0} trasforma dischi in dischi ed è una trasformazione affine invertibile (e quindi applica iperpiani in iperpiani) non è restrittivo supporre $\xi_0 = 0$. Distinguiamo ora due casi.

[Primo caso: π contiene l'asse delle t] Allora

$$\pi = \{\xi = (z,t) \; tali \; che \; < A, z >= 0\}$$

per un $A = (a,b) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}$. Con un calcolo diretto è facile verificare che i dischi metrici di raggio R e centri nei punti $(R\frac{A}{|A|}, 0)$ e $-(R\frac{A}{|A|}, 0)$ hanno le proprietà volute.

[Secondo caso: π non contiene l'asse delle t] Allora

$$\pi = \{\xi' = (x', y', t') \; tali \; che \; t' =< a, x' > + < b, y' >\}$$

per degli $a, b \in \mathbb{R}^n$. Il nostro scopo è trovare due punti $\xi, \widetilde{\xi} \in \partial B_d(0,R)$ che stiano da parti opposte rispetto a π e tali che le funzioni $d(\xi,\cdot), d(\widetilde{\xi},\cdot) : \pi \to \mathbb{R}$ abbiano l'origine come punto di minimo assoluto forte. Poniamo $\varrho = |a|^2 + |b|^2$, $r = R^4$. Se $\varrho = 0$, allora è immediato verificare che $\xi = (0, R^2)$ e $\widetilde{\xi} = -\xi$ soddisfano la nostra richiesta.

Supponiamo dunque $\varrho \neq 0$ e poniamo

$$t = \frac{1}{\varrho}(-8r^2 + 4\sqrt{4r^4 + \varrho^2 r^3})^{1/2} \tag{A.1}$$

in modo che t sia soluzione dell'equazione

$$\varrho^2 t^4 + 16 r^2 t^2 - 16 r^3 = 0 \tag{A.2}$$

In particolare risulta $t^2 < r$. Indichiamo per brevità $\gamma = \sqrt{r - t^2}$ e poniamo

$$\begin{cases} x = -\frac{t}{2r}(tb + \gamma a) \\ y = \frac{t}{2r}(ta - \gamma b) \\ \xi = (x, y, t) \end{cases} \tag{A.3}$$

Allora, usando (A.2), si vede con un breve calcolo che

$$d(\xi) = R \tag{A.4}$$

Poniamo ora $F_\xi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$,

$$F_\xi(z') = d(\xi, (z', < a, x' > + < b, y' >))^4 =$$

$$= |z - z'|^4 + (< a - 2y, x' > + < b + 2x, y' > -t)^2$$

Con un calcolo diretto si verifica che, poichè valgono (A.3) e (A.4), si ha

$$\nabla F_\xi(0) = 0$$

Pertanto l'origine è un punto critico di F_ξ. Inoltre la matrice Hessiana di F_ξ risulta

$$H(z') = H_{F_\xi}(z') = (8\zeta_j\zeta_k + 4|\zeta|^2\delta_{j,k} + 2\alpha_j\alpha_k)_{j,k\in\{1,\dots,2n\}}$$

(dove abbiamo posto per brevità $\zeta = z' - z$, $\alpha = (a - 2y, b + 2x)$) ed è quindi semidefinita positiva per ogni $z' \in \mathbb{R}^{2n}$, essendo per ogni $w \in \mathbb{R}^{2n}$

$$< H(z')w, w >= 8 < \zeta, w >^2 + 4|\zeta|^2|w|^2 + 2 < \alpha, w >^2 \geq 0$$

H è poi definita positiva nell'origine, in quanto $|z| \neq 0$ (poichè $t^2 < r$) e

$$< H(0)w, w > \geq 4|z|^2|w|^2$$

In definitiva F_ξ è convessa ed ha minimo assoluto forte in 0.

Poichè anche $\widetilde{t} = -t$ è soluzione di (A.2), se si definisce $\widetilde{\xi}$ sostituendo $\widetilde{t}$ a t in (A.3), anche $F_{\widetilde{\xi}}$ ha le stesse proprietà di F_ξ. Rimane dunque solo da provare che ξ e $\widetilde{\xi}$ stanno in componenti connesse distinte di $\mathbb{H}^n \setminus \pi$. Per fare questo osserviamo che $\frac{\xi + \widetilde{\xi}}{2} \in \pi$ in quanto

$$< (a, b, -1), \xi + \widetilde{\xi} >=< (a, b, -1), (-\frac{t^2}{r}b, \frac{t^2}{r}a, 0) >= 0$$

□

COROLLARIO A.2 *Se Ω è un semispazio di $\mathbb{H}^n$ allora per ogni $\xi_0 \in \partial\Omega$ e per ogni $R > 0$ esiste un disco metrico B di raggio R tale che $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}$.*

COROLLARIO A.3 *Se Ω è un convesso di $\mathbb{H}^n$ (in particolare se Ω è un disco nella metrica d) allora per ogni $\xi_0 \in \partial\Omega$ e per ogni $R > 0$ esiste un disco metrico B di raggio R tale che $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}$.*

Osserviamo esplicitamente che ogni disco $B_d(\xi, r)$ é convesso in quanto si ottiene mediante la traslazione τ_ξ (che è una trasformazione affine invertibile e quindi conserva la convessità) da un disco centrato nell'origine (che è ovviamente convesso per come è definito).

Bibliografia

[B] J.-M. BONY, *Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **19** (1969), 277-304.

[C] J. CYGAN, *Wiener's test for the Brownian motion on the Heisenberg group*, Colloquium Math. **39** (1978), 367-373.

[F] G.B. FOLLAND, *A fundamental solution for a subelliptic operator*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 373-376.

[FS] G.B. FOLLAND, E.M. STEIN, *Estimates for the $\overline{\partial_b}$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 429-522.

[G] B. GAVEAU, *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groups nilpotents*, Acta Math. **139** (1977), 95-153.

[GL] N. GAROFALO, E. LANCONELLI, *Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **40** (1990), 313-356.

[J] D.S. JERISON, *The Dirichlet problem for the Kohn Laplacian on the Heisenberg group I*, J. Funct. An. **43** (1981), 97-142.

[KN] J.J. KOHN, L. NIRENBERG, *Non-coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 443-492.

[W] K.-O. WIDMAN, *Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations*, Math. Scand. **21** (1967), 17-37.

SECONDA PARTE
Un teorema di tipo Liouville su semispazi per il Laplaciano di Kohn

1 Introduzione

In questa seconda parte proviamo il seguente risultato.

TEOREMA 1.1 *Sia Ω un semispazio di $\mathbb{H}^n$ con bordo parallelo al centro di $\mathbb{H}^n$. Se u è una funzione $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-superarmonica non negativa tale che*

$$u \in L^1(\Omega),$$

allora $u \equiv 0$ in Ω.

Da questo teorema si ricava il seguente corollario.

COROLLARIO 1.2 *Se $u \in L^1(\Omega) \cap C^2(\Omega)$, $u \geq 0$ e $\Delta_{\mathbb{H}^n} u \leq 0$, allora $u \equiv 0$ in Ω.*

Facciamo riferimento al paragrafo seguente per le notazioni e le definizioni; vogliamo qui invece commentare brevemente il risultato e la tecnica utilizzata nella prova.

Il Teorema 1.1 non è migliorabile nella "scala" dei gruppi di Heisenberg $\mathbb{H}^n$. Infatti, per ogni $p > 1$ e $n > \frac{1}{p-1}$, esistono funzioni $\Delta_{\mathbb{H}^n}$-superarmoniche su $\mathbb{H}^n$ appartenenti a $L^p(\Omega)$ e strettamente positive (ad esempio la soluzione fondamentale Γ di $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$).

La nostra tecnica si basa fortemente sull'uso di un operatore di media opportunamente adattato alla geometria di Ω e non è applicabile se il bordo di Ω non è parallelo al centro di $\mathbb{H}^n$. Tuttavia, questa tecnica può essere facilmente usata per ottenere un risultato analogo per il Laplaciano classico Δ su $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.3 *Sia Ω un semispazio di $\mathbb{R}^n$. Se u è una funzione Δ-superarmonica non negativa tale che*

$$u \in L^1(\Omega),$$

allora $u \equiv 0$ in Ω.

Sottolineiamo che la nostra dimostrazione non richiede la conoscenza del nucleo di Poisson.

Teoremi di tipo Liouville su semispazi del gruppo di Heisenberg per $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ -disuguaglianze semilineari sono stati recentemente provati da Birindelli-Capuzzo Dolcetta-Cutrì [BCDC] mediante tecniche diverse. Il nostro risultato non può però essere dedotto da quelli in [BCDC].

Questa parte è organizzata nel modo segente. Nel paragrafo 2 fissiamo le notazioni e le definizioni e ci procuriamo alcuni risultati preliminari. Il paragrafo 3 è dedicato alla prova del Teorema 1.1 e del suo corollario. La prova del Teorema 1.3 segue la stessa linea di quella del Teorema 1.1 ed è quindi omessa.

2 Alcuni richiami sul gruppo di Heisenberg

Il gruppo di Heisenberg $\mathbb{H}^n$, i cui punti verranno denotati con $\xi = (z,t) = (x,y,t)$, è il gruppo di Lie $(\mathbb{R}^{2n+1}, \circ)$, dove

$$\xi \circ \xi' = (z + z', t + t' + 2(< x', y > - < x, y' >))$$

definisce una legge di composizione interna con elemento neutro 0 e tale che per ogni ξ risulta $\xi^{-1} = -\xi$. Il centro di $\mathbb{H}^n$ è l'insieme $\{(0,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, cioè l'asse t. Un semispazio di $\mathbb{H}^n$ è semplicemente un semispazio di $\mathbb{R}^{2n+1}$. Il Laplaciano di Kohn (o Laplaciano subellittico) su $\mathbb{H}^n$ è l'operatore

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2)$$

dove per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$

$$X_j = \partial_{x_j} + 2y_j \partial_t$$
$$Y_j = \partial_{y_j} - 2x_j \partial_t$$

Si pone

$$\nabla_{\mathbb{H}^n} = (X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n)$$

L'operatore $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ ha forma caratteristica semidefinita positiva ma non è ellittico in nessun punto.

Esiste un naturale gruppo di dilatazioni su $\mathbb{H}^n$ definito da

$$\delta_\lambda(\xi) = (\lambda z, \lambda^2 t)$$

per ogni $\lambda > 0$. Il determinante Jacobiano di δ_λ è λ^Q dove

$$Q = 2n + 2$$

prende il nome di dimensione omogenea di $\mathbb{H}^n$ e gioca un ruolo analogo alla dimensione euclidea nel caso del Laplaciano classico. Gli operatori $\nabla_{\mathbb{H}^n}$ e $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ risultano invarianti rispetto alle traslazioni a sinistra di $\mathbb{H}^n$ ed omogenei (di grado uno e di grado due, nell'ordine) rispetto alle dilatazioni δ_λ; in altre parole ponendo

$$\tau_\xi(\xi') = \xi \circ \xi'$$

si ha

$$\nabla_{\mathbb{H}^n}(u \circ \tau_\xi) = (\nabla_{\mathbb{H}^n} u) \circ \tau_\xi, \ \nabla_{\mathbb{H}^n}(u \circ \delta_\lambda) = \lambda(\nabla_{\mathbb{H}^n} u) \circ \delta_\lambda$$
$$\Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \tau_\xi) = (\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \tau_\xi, \ \Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \delta_\lambda) = \lambda^2(\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \delta_\lambda$$

Una forte analogia fra gli operatori $-\Delta$ e $-\Delta_{\mathbb{H}^n}$ sta nel fatto che la soluzione fondamentale di quest'ultimo (cfr.[F]) è data da

$$\Gamma(\xi) = \frac{c_Q}{d(\xi)^{Q-2}}$$

dove $c_Q > 0$ e

$$d(\xi) = (|z|^4 + t^2)^{1/4}$$

Se si pone poi $d(\xi, \xi') = d(\xi'^{-1} \circ \xi)$ allora d risulta una distanza su $\mathbb{H}^n$ (cfr.[C]). Indicheremo con $B_d(\xi, r) = \{\xi' \in \mathbb{H}^n \ tali \ che \ d(\xi, \xi') < r\}$ i dischi nella metrica d. Valgono allora

$$\delta_\lambda(B_d(0,r)) = B_d(0, \lambda r)$$
$$\tau_\xi(B_d(0,r)) = B_d(\xi, r)$$
$$|B_d(\xi, r)| = r^Q |B_d(0,1)|$$

Per maggiori dettagli sul gruppo di Heisenberg si veda, per esempio, [FS].

Garofalo e Lanconelli hanno dimostrato in [GL] le seguenti importanti formule di media (cfr. anche Gaveau [G]): se u è una funzione di classe C^∞ su un aperto Ω di $\mathbb{H}^n$ e $\overline{B_d(\xi, r)} \subseteq \Omega$ allora

$$u(\xi) = (m_r u)(\xi) - \int_{B_d(\xi,r)} (\Gamma(\xi, \xi') - \frac{c_Q}{r^{Q-2}}) \Delta_{\mathbb{H}^n} u(\xi') d\xi' \tag{2.1}$$

$$u(\xi) = (M_r u)(\xi) - \frac{Q}{r^Q} \int_0^r \varrho^{Q-1} \int_{B_d(\xi,\varrho)} (\Gamma(\xi, \xi') - \frac{c_Q}{\varrho^{Q-2}}) \Delta_{\mathbb{H}^n} u(\xi') d\xi' d\varrho \tag{2.2}$$

dove si è posto

$$(m_r u)(\xi) = \frac{1}{Q \alpha_Q r^{Q-1}} \int_{\partial B_d(\xi,r)} \frac{\psi(\xi, \xi')}{|\nabla d(\xi, \xi')|} u(\xi') d\sigma(\xi')$$

$$(M_r u)(\xi) = \frac{1}{\alpha_Q r^Q} \int\limits_{B_d(\xi,r)} \psi(\xi,\xi')u(\xi')d\xi'$$

$$\psi(\xi) = \frac{|z|^2}{d(\xi)^2}$$

$$\alpha_Q = \int\limits_{B_d(0,1)} \psi(\xi)d\xi$$

Abbiamo inoltre denotato $\psi(\xi,\xi') = \psi(\xi'^{-1} \circ \xi)$, $\Gamma(\xi,\xi') = \Gamma(\xi'^{-1} \circ \xi)$.

DEFINIZIONE 2.1 *Diremo che una funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ è supermedia in Ω se e solo se per ogni disco $B_d(\xi,r)$ con chiusura inclusa in Ω si ha*

$$u(\xi) \geq (M_r u)(\xi)$$

OSSERVAZIONE 2.2 *Dalla (2.2) segue subito che se $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\Delta_{\mathbb{H}^n} u \leq 0$ in Ω, allora u è supermedia in Ω.*

Vogliamo ora prendere in esame i semispazi di $\mathbb{H}^n$.

DEFINIZIONE 2.3 *Diremo che un'applicazione $\varrho : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ è una rotazione intorno all'asse t se esiste una trasformazione unitaria complessa $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ per la quale vale $\varrho(z,t) = (F(z),t)$.*

PROPOSIZIONE 2.4 *Sia Ω un semispazio di $\mathbb{H}^n$ e poniamo $\Omega_1 = \{x_1 > 0\}$, $\Omega_t = \{t > 0\}$; allora si verifica uno dei due casi seguenti:*

(i) Esiste $\xi_0 \in \mathbb{H}^n$ tale che $\Omega = \tau_{\xi_0}(\Omega_t)$ oppure $\Omega = \tau_{\xi_0}(-\Omega_t)$.

(ii) Esistono $\xi_0 \in \mathbb{H}^n$ ed una rotazione ϱ intorno all'asse t tali che $\Omega = \varrho\tau_{\xi_0}(\Omega_1)$.

Più precisamente il primo caso si verifica quando $\partial\Omega$ e l'asse t sono incidenti, il secondo quando sono paralleli.

Dimostrazione

[Primo caso: $\partial\Omega$ interseca l'asse t] Allora esistono $t_0 \in \mathbb{R}$ ed $N = (a,b,c) \in \mathbb{R}^{2n+1}$, con $c \neq 0$, tali che

$$\partial\Omega = \{\xi \in \mathbb{H}^n \text{ tali che } < \xi - (0,t_0), N >= 0\}$$

Poniamo $x_0 = \frac{b}{2c}$, $y_0 = -\frac{a}{2c}$ e $\xi_0 = (x_0, y_0, t_0)$; con un semplice calcolo si vede che per ogni $\xi \in \Omega_t$ risulta $< \xi_0 \circ \xi - (0,t_0), N >= 0$. Pertanto $\tau_{\xi_0}(\partial\Omega_t) \subseteq \partial\Omega$ e dunque, poichè τ_{ξ_0} è una trasformazione affine invertibile (e quindi applica iperpiani in iperpiani e semispazi in semispazi), si verifica (i).

[Secondo caso: $\partial\Omega$ è parallelo all'asse t] Allora esistono $k \in \mathbb{R}$ e $\zeta = (a,b) \in \mathbb{R}^{2n}\setminus\{0\} \equiv \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tali che

$$\Omega = \{\xi \in \mathbb{H}^n \ tali\ che\ < z,\zeta > > k\}$$

Nel seguito useremo anche la seguente notazione per i punti di $\mathbb{H}^n$: $\xi = (z,t) = (x_1;\hat{z},t)$ dove $\hat{z} = (x_2,\dots,x_n,y)$. Per il teorema di completamento della base ortonormale esiste una trasformazione unitaria complessa $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tale che $F(1;0) = \frac{\zeta}{|\zeta|}$. Poniamo ora $\xi_0 = (\frac{k}{|\zeta|};0,0)$, $\varrho : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n, \varrho(z,t) = (F(z),t)$; poichè F è unitaria complessa si ha

$$\xi \in \Omega \iff < F^{-1}(z), F^{-1}(\zeta) > = < z,\zeta > > k \iff < F^{-1}(z), (|\zeta|;0) > > k \iff$$

$$\iff F^{-1}(z) \in \{x_1 > \frac{k}{|\zeta|}\} \iff \varrho^{-1}(\xi) \in \tau_{\xi_0}\Omega_1$$

Pertanto $\Omega = \varrho\tau_{\xi_0}\Omega_1$.

□

PROPOSIZIONE 2.5 *L'operatore $\Delta_{\mathbb{H}^n}$ è invariante per le rotazioni intorno all'asse t (oltre che per le traslazioni a sinistra). In altri termini risulta $\Delta_{\mathbb{H}^n}(u \circ \varrho) = (\Delta_{\mathbb{H}^n} u) \circ \varrho$.*

Dimostrazione

Poniamo $P = \sum_{j=1}^n (y_j\partial_{x_j} - x_j\partial_{y_j}) = Im(< z, \nabla_z >_{\mathbb{C}^n})$; allora risulta

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} = \Delta_z + 4|z|^2\partial_t^2 + 4\partial_t P$$

Poichè Δ_z è invariante per le trasformazioni unitarie complesse, basterà provare che lo è anche P. Sia dunque F unitaria complessa e sia A la matrice che rappresenta F come endomorfismo reale. Essendo $A^t = A^{-1}$, si ha per ogni $v \in C^2(\mathbb{R}^{2n})$

$$F(\nabla(v \circ F)(z)) = (A(\nabla(v \circ F)(z))^t)^t = (A(\nabla v(F(z))A)^t)^t = \nabla v(F(z))$$

e quindi

$$P(v \circ F)(z) = Im(< z, \nabla(v \circ F)(z) >_{\mathbb{C}^n}) = Im(< F(z), F(\nabla(v \circ F)(z)) >_{\mathbb{C}^n}) =$$

$$Im(< F(z), \nabla v(F(z)) >_{\mathbb{C}^n}) = (Pv)(F(z))$$

□

PROPOSIZIONE 2.6 *La proprietà di supermedia è invariante per le rotazioni intorno all'asse t e per le traslazioni a sinistra.*

Dimostrazione

È una semplice verifica, una volta osservato che valgono $\varrho(\xi) \circ \varrho(\xi') = \varrho(\xi \circ \xi')$, $d(\varrho(\xi)) = d(\xi)$ e quindi si ha anche $\varrho B_d(\xi,r) = B_d(\varrho\xi,r)$, qualunque sia la rotazione ϱ intorno all'asse t.

□

3 Il teorema di non esistenza

Per quanto visto nel paragrafo 2 (cfr. proposizioni 2.4 e 2.6) è sufficiente dimostrare il teorema 1.1 per $\Omega = \{x_1 > 0\}$. In tale caso ci porremo quindi da qui in avanti.
Denotiamo i punti di $\mathbb{H}^n$ con $\xi = (z,t) = (x_1; \hat{z}, t)$. Poniamo per ogni $\xi \in \Omega$

$$r(\xi) = \frac{x_1}{2}$$

$$B_\xi = B_d(\xi, r(\xi))$$

$$A_\xi = \{\eta \in \Omega \text{ tali che } d(\xi,\eta) < r(\eta)\}$$

(osserviamo che $\chi_{B_\xi}(\eta) = \chi_{A_\eta}(\xi)$). Poniamo poi

$$K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R},\ K(\xi,\xi') = \frac{\psi(\xi,\xi')}{\alpha_Q r(\xi)^Q} \chi_{B_\xi}(\xi')$$

e, per ogni $u \in L_{loc}(\Omega)$,

$$Tu : \Omega \to \mathbb{R},\ (Tu)(\xi) = (M_{r(\xi)}u)(\xi) = \int K(\xi,\xi')u(\xi')d\xi'$$

Siano infine

$$\eta_0 = (1;0,0)$$

$$\beta = \int K(\eta,\eta_0)d\eta$$

Il punto chiave per la dimostrazione del teorema è il seguente lemma.

LEMMA 3.1 *Risulta* $\int K(\xi,\xi_0)d\xi = \beta$ *per ogni* $\xi_0 \in \Omega$.

Dimostrazione

Fissiamo $\xi_0 = (x_0^1; \hat{z}_0, t_0) \in \Omega$ e poniamo $\overline{\xi_0} = \xi_0 \circ (-x_0^1; 0, 0) = \tau_{\xi_0}(\delta_{x_0^1}\eta_0)^{-1}$; Poniamo poi, per brevità, $\tau = \tau_{\overline{\xi_0}}$, $\delta = \delta_{x_0^1}$; allora $\xi_0 = \tau\delta\eta_0$. Inoltre $A_{\xi_0} = \tau\delta A_{\eta_0}$; infatti per ogni $\eta \in \Omega$ valgono

$$d(\tau\delta\eta,\xi_0) = d(\xi_0^{-1} \circ \overline{\xi_0} \circ \delta\eta) = d((\delta\eta_0)^{-1} \circ \delta\eta) =$$
$$= d(\delta(\eta_0^{-1} \circ \eta)) = x_0^1 d(\eta,\eta_0)$$

e

$$r(\tau\delta\eta) = r(\overline{\xi_0} \circ \delta\eta) = \frac{(\overline{\xi_0} \circ \delta\eta)_1}{2} =$$
$$= \frac{(\delta\eta)_1}{2} = x_0^1 \frac{\eta_1}{2} = x_0^1 r(\eta)$$

e quindi

$$\eta \in A_{\eta_0} \iff d(\eta,\eta_0) < r(\eta) \iff d(\tau\delta\eta,\xi_0) < r(\tau\delta\eta) \iff \tau\delta\eta \in A_{\xi_0}$$

In definitiva si ha

$$\beta = \int K(\eta,\eta_0)d\eta = \int\limits_{A_{\eta_0}} \frac{\psi(\eta,\eta_0)}{\alpha_Q r(\eta)^Q}d\eta = (x_0^1)^{-Q}\int\limits_{\delta A_{\eta_0}} \frac{\psi(\delta^{-1}\zeta,\eta_0)}{\alpha_Q r(\delta^{-1}\zeta)^Q}d\zeta =$$

(ricordando che ψ è omogenea di grado zero rispetto alle dilatazioni)

$$= (x_0^1)^{-Q}\int\limits_{\delta A_{\eta_0}} \frac{\psi(\zeta,\delta\eta_0)}{\alpha_Q((x_0^1)^{-1}r(\zeta))^Q}d\zeta = \int\limits_{\delta A_{\eta_0}} \frac{\psi(\zeta,\delta\eta_0)}{\alpha_Q r(\zeta)^Q}d\zeta =$$

$$= \int\limits_{\tau\delta A_{\eta_0}} \frac{\psi(\overline{\xi_0}^{-1}\circ\xi,\delta\eta_0)}{\alpha_Q r(\overline{\xi_0}^{-1}\circ\xi)^Q}d\xi =$$

(essendo $r(\overline{\xi_0}^{-1}\circ\xi) = r(\xi)$ poichè $\overline{x}_0^1 = 0$)

$$= \int\limits_{A_{\xi_0}} \frac{\psi(\xi,\overline{\xi_0}\circ\delta\eta_0)}{\alpha_Q r(\xi)^Q}d\xi = \int\limits_{A_{\xi_0}} \frac{\psi(\xi,\xi_0)}{\alpha_Q r(\xi)^Q}d\xi = \int K(\xi,\xi_0)d\xi$$

□

COROLLARIO 3.2 *Per ogni $u \in L_{loc}(\Omega)$ si ha*

$$\| Tu \|_\infty \leq \| u \|_\infty \tag{3.1}$$

$$\| Tu \|_p^p \leq \beta \| u \|_p^p \quad \forall p \in]1,+\infty[\tag{3.2}$$

$$(u \in L^1(\Omega)) \Rightarrow (\int\limits_\Omega Tu = \beta \int\limits_\Omega u) \tag{3.3}$$

In particolare T risulta un operatore lineare continuo in $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1,+\infty]$.

Dimostrazione

La (3.1) segue subito dalla definizione di T. Proviamo dunque la (3.2). Dalla diseguaglianza di Hölder si ottiene

$$|Tu(\xi)| = |\int K(\xi,\xi')u(\xi')d\xi'| \leq \| K(\xi,\cdot)^{1/p'} \|_{p'} \| K(\xi,\cdot)^{1/p}u \|_p$$

Essendo poi ovviamente $\int K(\xi,\xi')d\xi' = (M_{r(\xi)}(1))(\xi) = 1$, si ha

$$|Tu(\xi)|^p \leq \left|\int K(\xi,\xi')d\xi'\right|^{p/p'} \int K(\xi,\xi')|u(\xi')|^p d\xi' = \int K(\xi,\cdot)|u|^p$$

Infine, per quanto provato nel lemma 3.1, risulta

$$\| Tu \|_p^p \leq \int_\Omega \int_\Omega K(\xi,\xi')|u(\xi')|^p d\xi' d\xi =$$

$$= \int_\Omega |u(\xi')|^p \int_\Omega K(\xi,\xi') d\xi d\xi' = \beta \| u \|_p^p$$

Vediamo ora la (3.3). Di nuovo per il lemma 3.1 si ha

$$\int_\Omega Tu(\xi) d\xi = \int_\Omega \int_\Omega K(\xi,\xi') u(\xi') d\xi' d\xi =$$

$$= \int_\Omega u(\xi') \int_\Omega K(\xi,\xi') d\xi d\xi' = \beta \int_\Omega u(\xi') d\xi'$$

□

LEMMA 3.3 *Risulta* $\beta > 1$.

Dimostrazione

Poniamo $v = d^{-Q} \circ \tau_{\eta_0} : \Omega \to \mathbb{R}$; allora $v \in C^\infty(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Inoltre

$$\Delta_{\mathbb{H}^n}(d^{-Q}) = \psi(Q(Q+1)d^{-Q-2} + \frac{Q-1}{d}(-Q)d^{-Q-1}) = 2Q\psi d^{-Q-2}$$

e dunque

$$\Delta_{\mathbb{H}^n} v = (2Q\psi d^{-Q-2}) \circ \tau_{\eta_0} > 0 \quad in\ \Omega$$

Dalla formula di media (2.2) si ottiene per ogni $\xi \in \Omega$

$$Tv(\xi) = (M_{r(\xi)} v)(\xi) =$$

$$= v(\xi) + \frac{Q}{r(\xi)^Q} \int_0^{r(\xi)} \varrho^{Q-1} \Big(\int_{B_d(\xi,\varrho)} (\Gamma(\xi,\cdot) - \frac{c_Q}{\varrho^{Q-2}}) \Delta_{\mathbb{H}^n} v \Big) d\varrho \geq v(\xi)$$

In particolare, scelto un compatto K incluso in Ω con $|K| > 0$, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $Tv \geq v + \varepsilon$ in K. In definitiva da (3.2) si ottiene

$$\beta \| v \|_2^2 \geq \| Tv \|_2^2 = \int_K |Tv|^2 + \int_{\Omega \setminus K} |Tv|^2 \geq$$

$$\geq \int_K |v+\varepsilon|^2 + \int_{\Omega\setminus K} |v|^2 \geq \varepsilon^2 |K| + \int_\Omega |v|^2 > \| v \|_2^2$$

ed essendo $v \in L^2(\Omega)$ risulta $\beta > 1$.
□

Dimostrazione del teorema 1.1

Poichè u è supermedia si ha $u \geq Tu$ e dunque da (3.3)

$$\int_\Omega u \geq \int_\Omega Tu = \beta \int_\Omega u$$

Essendo poi $u \in L^1(\Omega)$ e $\beta > 1$ (lemma 3.3) si ottiene

$$\int_\Omega u \leq 0$$

Pertanto, se $u \geq 0$, deve essere $u \equiv 0$ in Ω.
□

Bibliografia

[BCDC] I. Birindelli, I. Capuzzo Dolcetta, A. Cutrì, *Liouville theorems for semilinear equations on the Heisenberg group*, Ann. Inst. Henry Poincaré - Analyse non Lineaire (to appear).

[C] J. Cygan, *Wiener's test for the Brownian motion on the Heisenberg group*, Colloquium Math. **39** (1978), 367-373.

[F] G.B. Folland, *A fundamental solution for a subelliptic operator*, Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 373-376.

[FS] G.B. Folland, E.M. Stein, *Estimates for the $\overline{\partial_b}$ complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 429-522.

[G] B. Gaveau, *Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous elliptiques sur certains groups nilpotents*, Acta Math. **139** (1977), 95-153.

[GL] N. Garofalo, E. Lanconelli, *Frequency functions on the Heisenberg group, the uncertainty principle and unique continuation*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **40** (1990), 313-356.